Секция: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.98

Канонические представления на плоскости Лобачевского–Галилея, индуцированные характерами [1]

© Ю. В. Дунин

Ключевые слова: дуальные числа, канонические представления, плоскость Лобачевского

Для плоскости Лобачевского–Галилея вводятся канонические представления, индуцированные характерами мультипликативной группы алгебры дуальных чисел, они разлагаются на неприводимые

В настоящей работе мы вводим для плоскости Лобачевского–Галилея канонические представления, индуцированные характерами мультипликативной группы алгебры дуальных чисел, мы разлагаем их на неприводимые составляющие, руководствуясь схемой изучения канонических представлений для классической плоскости Лобачевского, см. [5]. Надгруппой служит группа Лагерра $\mathrm{SL}(2,\Lambda)$, см. [4].

Приведем некоторые сведения об алгебре дуальных чисел и плоскости Лобачевского–Галилея из [4] и [2].

Алгебра Λ дуальных чисел есть двумерная алгебра над полем $\mathbb{R}$, состоящая из элементов $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$, с соотношением $j^2 = 0$. Числом, сопряженным дуальному числу $z = x + jy$, называется число $\overline{z} = x - jy$. Абсолютная величина $|z|$ числа z есть $\sqrt{z\overline{z}} = |x|$. Мультипликативная группа Λ^* алгебры Λ состоит из дуальных чисел $z = x + jy$, для которых $x \neq 0$. Мы будем рассматривать

[1]Работа поддержана Госзаданием Минобрнауки 1.3445.2011, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" 14.740.11.0349

следующие характеры (одномерные представления в группу $\mathbb{C}^*$) $z \mapsto z^{\mu,\nu}$, где $\mu, \nu \in \mathbb{C}$, группы Λ^*:

$$z^{\mu,\nu} = |x|^\mu \cdot \exp\left(\nu\, \frac{y}{x}\right) \tag{1}$$

(заметим, что произвольный характер группы Λ^* имеет несколько более общий вид: он получается из указанного добавлением множителя $(\operatorname{sgn} x)^\varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1$, однако, в настоящей работе для простоты мы ограничимся характерами (1)).

Плоскость Лобачевского–Галилея $\mathcal{L}$ есть множество на плоскости Λ, задаваемое неравенством $z\overline{z} < 1$. Это – вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = -1$ и $x = 1$.

Группа G движений плоскости Лобачевского–Галилея $\mathcal{L}$ состоит из дробно-линейных преобразований

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{az + \overline{b}}{bz + \overline{a}}, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1, \quad a, b \in \Lambda. \tag{2}$$

Она сохраняет меру

$$d\mu(z) = \frac{dx\, dy}{(1 - x^2)^2}.$$

Матрицы

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad a\overline{a} - b\overline{b} = 1,$$

соответствующие преобразованиям (2), образуют группу $\mathrm{SU}(1, 1; \Lambda)$. Обозначим $a = \alpha + jp$, $b = \beta + jq$. Условие $a\overline{a} - b\overline{b} = 1$ равносильно тому, что $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, так что $\alpha^2 \geqslant 1$, т. е. $\alpha \geqslant 1$ или $\alpha \leqslant -1$. Следовательно, группа $\mathrm{SU}(1, 1; \Lambda)$ состоит из двух связных кусков. Группа G изоморфна связной компоненте единицы группы $\mathrm{SU}(1, 1; \Lambda)$. Эта компонента состоит из матриц g с условием $\alpha \geqslant 1$. Для нее мы сохраним обозначение G. Параметры α и β матрицы $g \in G$ можно записать в виде $\alpha = \operatorname{ch} t$ и $\beta = \operatorname{sh} t$, где $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, всякую матрицу $g \in G$ можно записать в виде

$$g = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} p & q \\ -q & -p \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Стационарной подгруппой точки $z = 0$ служит подгруппа K, состоящая из диагональных матриц:

$$k = \begin{pmatrix} 1 + jp & 0 \\ 0 & 1 - jp \end{pmatrix}, \tag{4}$$

так что $\mathcal{L} = G/K$.

Напомним [1] некоторые сведения о представлениях группы G. Представление T_σ, $\sigma \in \mathbb{C}$, действует в пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ финитных функций $\varphi(s)$ на $\mathbb{R}$ класса C^∞ по формуле

$$\left(T_\sigma(g)\, \varphi\right)(s) = \varphi(s + t) \cdot \exp\left\{\sigma[-p\, \operatorname{sh}(2s + t) + q\, \operatorname{ch}(2s + t)]\right\},$$

где t, p, q – параметры элемента g, см. (3). В частности, для $k \in K$, см. (4), мы имеем

$$(T_\sigma(k)\,\varphi)\,(s) = \varphi(s)\cdot\exp(-\sigma p \operatorname{sh} 2s), \tag{5}$$

Эрмитова форма (скалярное произведение из $L^2(\mathbb{R}, ds)$)

$$\langle \psi, \varphi\rangle_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s)\overline{\varphi(s)}\,ds$$

инвариантна относительно пары $(T_\sigma, T_{-\overline{\sigma}})$, то есть

$$\langle T_\sigma(g)\psi, \varphi\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \psi, T_{-\overline{\sigma}}(g^{-1})\varphi\rangle_{\mathbb{R}}\,, \tag{6}$$

так что для чисто мнимых σ представление T_σ унитаризуемо.

С помощью (6) представление T_σ распространяется на пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций F на $\mathbb{R}$.

Пусть $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$. Каноническое представление $R_{\lambda,\nu}$ группы G действует в пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ финитных функций $f(z)$ на $\mathcal{L}$ класса C^∞ по формуле

$$\begin{aligned}(R_\lambda(g)f)\,(z) &= f(z\cdot g)\,(bz+\overline{a})^{-2\lambda-4,\nu}\\ &= f(z\cdot g)\,(\beta\,x+\alpha)^{-2\lambda-4}\exp\left(\nu\,\frac{qx+\beta y-p}{\beta\,x+\alpha}\right).\end{aligned}$$

В предыдущей работе [3] мы рассматривали случай $\nu = 0$. При $\lambda = -2$, $\nu = 0$ это представление становится квазирегулярным представлением, см. [2].

Эрмитова форма

$$\langle f,\, h\rangle_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} f(z)\,\overline{h(z)}\,dx\,dy\,, \quad z = x + jy,$$

инвариантна относительно пары $(R_{\lambda,\nu}, R_{-\overline{\lambda}-2,-\overline{\nu}}\ )$:

$$\langle R_{\lambda,\nu}(g)f,\, h\rangle_{\mathcal{L}} = \langle f,\, R_{-\overline{\lambda}-2,-\overline{\nu}}(g^{-1})h\rangle_{\mathcal{L}}.$$

Это позволяет распространить представление R_λ на пространство $\mathcal{D}'(\overline{\mathcal{L}})$ обобщенных функций на Λ с носителями в $\overline{\mathcal{L}}$, в частности, на пространство обобщенных функций, сосредоточенных на вертикальных прямых $x = \pm 1$. Получающиеся таким образом граничные представления раскладываются по представлениям еще одной серии представлений группы G, описанной в [1]. Они не участвуют в разложении канонических представлений R_λ на $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Причина этого состоит в том, что для функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ее преобразование Пуассона $\left(P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,\varphi\right)(z)$, см. ниже, имеет носитель, лежащий в полосе, более узкой, чем $\mathcal{L}$ (в полосе $|x| < 1-\varepsilon < 1$), поэтому имеет нулевую асимптотику при $|x| \to 1$. Поэтому в настоящей статье, как и в [3], мы не будем рассматривать граничные представления.

Найдем обобщенные функции θ на $\mathbb{R}$, собственные для подгруппы K, см. (4):

$$T_\sigma(k)\,\theta = \exp(\nu p)\cdot\theta. \tag{7}$$

Из (5) и (7) мы получаем

$$[\exp(-\sigma p\,\mathrm{sh}\,2s) - \exp(\nu p)]\cdot\theta(s) = 0.$$

Отсюда следует, что искомая обобщенная функция – это дельта-функция

$$\theta_{\sigma,\nu}(s) = \delta(s - s_0),$$

где

$$\mathrm{sh}\,2s_0 = -\frac{\nu}{\sigma}\,.$$

Следовательно, отношение ν/σ должно быть *вещественным* числом.

Эта обобщенная функция порождает ядро Пуассона – следующим образом. Элемент

$$g_z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

из G переводит точку 0 в точку z. Ядро Пуассона определяется формулой

$$P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}(z,s) = \left(T_\sigma(g_z^{-1})\,\theta_{\sigma,\nu}\right)(s),$$

оно есть

$$P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}(z,s) = \delta(s-\xi-s_0)\,\exp\left\{\sigma\frac{y}{1-x^2}(A+Bx)\right\},$$

где $z = x + jy$, $x = \mathrm{th}\,\xi$ и для краткости мы обозначили $A = \mathrm{ch}\,2s_0$, $B = \mathrm{sh}\,2s_0$.

Ядро Пуассона порождает два преобразования – преобразование Пуассона $P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma} : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathcal{L})$ и преобразование Фурье $F^{(\nu)}_{\lambda,\sigma} : \mathcal{D}(\mathcal{L}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$, связанные с каноническим представлением $R_{\lambda,\nu}$. А именно,

$$\begin{aligned}
\left(P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,\varphi\right)(z) &= (1-x^2)^{-\lambda-2}\varphi(s_0+\xi)\,\exp\left\{\sigma\frac{y}{1-x^2}(A+Bx)\right\},\\
\left(F^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,f\right)(s) &= (1-c^2)^{\lambda+1}\int_{-\infty}^{\infty} f(c+iu)\,\exp\left\{\sigma\frac{u}{1-c^2}(A+Bx)\right\}du,
\end{aligned}$$

где $x = \mathrm{th}\,\xi$, $c = \mathrm{th}\,(s-s_0)$.

Преобразование Пуассона сплетает $T_{-\sigma}$ с $R_{\lambda,\nu}$, а преобразование Фурье сплетает $R_{\lambda,\nu}$ с T_σ:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda,\nu}(g)\,P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma} &= P^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,T_{-\sigma}(g),\\
F^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,R_{\lambda,\nu}(g) &= T_\sigma(g)\,F^{(\nu)}_{\lambda,\sigma}\,,
\end{aligned}$$

где $g \in G$. Преобразования Пуассона и Фурье сопряжены друг другу:

$$\langle P^{(\nu)}_{-\lambda-2,\sigma}\,\varphi,\, f\rangle_{\mathcal{L}} = \langle\varphi,\, F^{(\overline{\nu})}_{\overline{\lambda},\overline{\sigma}}\,f\rangle_{\mathbb{R}}.$$

Теорема 1 *Пусть ν и σ – чисто мнимые числа: $\nu = i\tau$ и $\sigma = i\rho$, здесь $i = \sqrt{-1}$ – комплексное число, τ и ρ – вещественные числа. Каноническое представление $R_{\lambda,i\tau}$ группы G в пространстве $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ разлагается по представлениям $T_{i\rho}$ с кратностью единица следующим образом. Сопоставим функции $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ совокупность ее компонент Фурье $F^{(i\tau)}_{\lambda,i\rho} f$, $\rho \in \mathbb{R}$. Это соответствие G-эквивариантно. Имеет место формула обращения:*

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (\tau/\rho)^2}\, P^{(-i\tau)}_{\lambda,-i\rho}\, F^{(i\tau)}_{\lambda,i\rho}\, f\, d\rho.$$

Литература

1. Ю. В. Дунин. Представления группы движений плоскости Лобачевского–Галилея. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2010, том 15, вып. 6, 1708–1712.

2. Ю. В. Дунин. Гармонический анализ на плоскости Лобачевского–Галилея. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2011, том 16, вып. 1, 99–103.

3. Ю. В. Дунин. Канонические представления на плоскости Лобачевского–Галилея. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки, 2012, том 17, вып. 1, 82–85.

4. В. Ф. Молчанов. Элементарные представления группы Лагерра. Матем. заметки, 1978, том 23, вып. 1, 31–39.

5. V. F. Molchanov, L. I. Grosheva. Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane. Acta Appl. Math., 2002, vol. 73, 59–77.

Поступила в редакцию 16 ноября 2012 года

Yu. V. Dunin. Canonical representations for the Lobachevsky–Galilei plane

For the Lobachevsky–Galilei plane, we introduce canonical representations induced by characters of the multiplicative group of the algebra of dual numbers, and decompose them into irreducible constituents

Keywords: dual numbers, canonical representations, Lobachevsky plane